LYCEE DE SBEITLA

$\sqrt{\alpha}$

Mathématiques

SECTION : 4-ième MATHÉMATIQUES
(Ancien programme)

BAC BLANC 2008

Durée de l'épreuve: 4 heures - Coefficient : 4

Professeur : Dhaouadi Nejib

Date : 08/05/2008

Ce devoir comporte 5 pages de 1/5 à 5/5

Exercice 1

Soit P une parabole de foyer F et de directrice une droite D

T_1 et T_2 deux tangentes à P respectivement en M_1 et M_2

H_1 et H_2 les projetés orthogonaux respectifs des points M_1 et M_2 sur la directrice D

1) a) Montrer que T_1 et T_2 sont sécantes (on peut raisonner par l'absurde)

On pose $T_1 \cap T_2 = \{A\}$

b) Montrer que $AH_1=AH_2=AF$

c) En déduire une méthode pour construire les tangentes éventuelles à une parabole issues d'un point donné A.

2) On suppose dans cette question que $A \in D$

On note S_1 et S_2 les symétries orthogonales d'axes respectifs T_1 et T_2 et $S=S_2 o S_1$

a) Déterminer $S(H_1)$

b) En déduire que T_1 et T_2 sont perpendiculaires.

c) Montrer que les points M_1 , M_2 et F sont alignés.

3) Etudier la réciproque en montrant que si les tangentes T_1 et T_2 sont perpendiculaires alors leur point d'intersection A appartient à la directrice D.

Exercice 2

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urneU_1, deux boules noires dans l'urneU_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé,

• s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1

• s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2

• si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1. »

B : « Le dé amène un multiple de trois. »

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »

N : « La boule tirée est noire. »

***1.** Le joueur joue une partie.*

***a.** Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à* $\frac{5}{3k}$.

***b.** Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.*

***c.** Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à* $\frac{1}{2}$.

***d.** Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à* $\frac{1}{30}$.

***2.** Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à* $\frac{1}{30}$.

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ *par* $g(x) = \sqrt{-Logx}$.

1) a) *Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1*

b) *Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) a) *Montrer que g réalise une bijection de]0,1] sur un intervalle J que l'on précisera.*

b) *Soit h la fonction réciproque de g. Expliciter h(x) pour tout* $x \in J$

c) *Tracer la courbe de h dans le même repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie B

On considère la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$

1) *Montrer que F est dérivable sur IR et calculer* $F'(x)$.

2) *Etudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.*

3) a) *Vérifier que pour tout* $t \in [2, +\infty[$ *on a :* $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$

En déduire que pour tout $x \geq 2$ *on a :* $F(x) \leq \dfrac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}dt$

b) *Prouver que pour tout* $x \geq 2$ *on a :* $F(x) \leq \dfrac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}dt$

4°/ *Montrer que F est majorée sur IR et que F possède une limite finie l en* $+\infty$.
(On ne demande pas de calculer cette limite)

Partie C

1) *Soit G la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $G(x) = F(x\sqrt{n})$; *pour tout* $n \in IN^*$.

a) *Montrer que G est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *et calculer* $G'(x)$ *pour* $x \in [0,+\infty[$.

b) *En déduire que* $\int_0^1 e^{-nx^2}dx = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$

2) a) *Montrer que pour tout réel t on a :* $e^t \geq 1+t$ *et que pour tout* $t \geq 0$ *on a :* $e^{-t} \leq \dfrac{1}{1+t}$

b) *En déduire que pour tout* $n \in IN^*$ *on a :*

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \geq \sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad \text{et que} \quad \int_0^1 e^{-nx^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

Partie D

On pose pour tout $n \in IN^*$: $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$ *et* $v_n = (n+1)u_n u_{n+1}$

1) a) *Calculer* u_1 *et* u_2

b) *Montrer que pour tout* $n \in IN^*$ *on a :* $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$

En déduire que la suite (v_n) *est constante.*

c) *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

2) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 2$ *, on a :* $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ *et déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

3) a) *Vérifier que pour tout entier* $n \geq 2$ *on a :* $\sqrt{n}\; u_n = \sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}} .v_{n-1}}$.

b) *En déduire que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\; u_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *et que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4) a) *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on pose* $H(x) = \int_0^{Cosx} (1-t^2)^n dt$ $(n \in IN^*)$

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et calculer* $H'(x)$

En d'duire que $u_{2n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

b) *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on pose* $K(x) = \int_0^{Cotgx} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ $(n \in IN^*)$

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et calculer* $K'(x)$.

En d'duire que $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-2} dx$

5) *En déduire que pour tout entier* $n \geq 2$ *, on a :* $\sqrt{n}\; u_{2n+1} \leq G(1) \leq \sqrt{n}\; u_{2n-2}$

6) *Montrer alors que* $\lim\limits_{n \to +\infty} G(1) = l = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

BON TRAVAIL

ET

BONNE RÉVISION